Thèse

présentée

à la

FACULTE DES SCIENCES

de

L'UNIVERSITE DE PARIS

par

Paul CURTZ

pour obtenir le titre de

Docteur de 3ème Cycle

d'ANALYSE NUMERIQUE

ACCELERATION DE LA CONVERGENCE DE CERTAINES SERIES ALTERNEES A L'AIDE DES FONCTIONS DE SOMMATION

---

soutenue le 4 Mai 1965 devant le Jury

Monsieur le Professeur R. DE POSSEL, Président

Monsieur J. ARSAC) Examinateurs
Monsieur J. CEA)

S O M M A I R E

I N T R O D U C T I O N

EXPOSE GENERAL DU PROBLEME

Soit une fonction donnée par la somme d'une série supposée convergente, pour le moment,

$$f(x) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$$

On se propose de chercher comment construire un polynôme approchant f(x) en limitant la somme à n termes, avec au besoin une modification des coefficients de la série.

Trois méthodes sont possibles :

1°) Chercher a priori un tel polynôme indépendamment des valeurs connues de la fonction f(x).

2°) Transformer la série en une autre de même somme mais plus rapidement convergente.

3°) Appliquer un procédé de sommation limitant la série à n termes avec pondération des coefficients.

Les deux dernières méthodes donnent, en fin de compte, des résultats du même type, bien que partant de points de vue différents. Elles sont universelles par opposition à la première qui ne s'applique, en général, qu'à une sorte de série. Par exemple, pour calculer Log (1+x) par

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} - \dots$$

Cecil HASTINGS donne des polynômes de meilleure approximation quand on ne prend que les n premiers termes (n = 4,5,6, ... 20). Quand n croît le coefficient de x tend vers 1, celui de x^2 vers $-\frac{1}{2}$, celui x^3 vers $\frac{1}{3}$ etc.. Voir la référence bibliographique n° 1, page 52.

Ces trois méthodes sont, bien entendu, linéaires.

C'est la troisième méthode qui fait l'objet de l'essentiel du travail présenté ici.

Remarque :

L'idée d'utiliser des procédés de sommation vient de ce qu'ils ont donné, pour les séries trigonométriques, d'excellents résultats et conduit à une analyse assez simple de l'erreur. Voir la référence bibliographique n° 2.

°
° °

I. METHODES UNIVERSELLES CONNUES ET FONCTIONS DE SOMMATION

a) Exposé de certaines méthodes universelles pour l'accélération de la convergence de certaines séries alternées

On peut calculer la somme de certaines séries alternées (convergentes ou non) plus rapidement qu'en effectuant la somme de chacun de leurs termes.

Trois méthodes universelles sont exposées ici (*) :

1°) La transformation d'Euler;

2°) Le procédé des demi-sommes;

3°) Une méthode qui n'a pas de nom et qui est expliquée après la précédente.

1°) La transformation d'Euler.

Soit une série alternée qu'on notera une fois pour toutes, les a_i étant positifs quel que soit i,

$$a_0 - a_1 + a_2 - \ldots\ldots + (-1)^n \; a_n - \ldots\ldots$$

et dont la somme est :

$$S = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \; a_p$$

Si on s'arrête au (n+1) ième terme c'est-à-dire à :

$$(-1)^n \; a_n$$

on a la somme partielle S_n :

$$S_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \; a_p$$

(*) Il en existe d'autres non linéaires plus puissantes mais elles sortent du cadre de cette étude (voir annexe A page 45).

La transformation d'Euler consiste à former les différences premières, deuxièmes, ... n ième et à prendre comme nouvelle série

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \Delta^p a_0 \qquad (*)$$

où $\Delta^p a_0$

est la différence p -ième

$$\Delta^0 a_0 = a_0$$

$$-\Delta^1 a_0 = a_0 - a_1$$

$$\Delta^2 a_0 = a_0 - 2a_1 + a_2$$

- - - - - - - - - - - - - -

$$(-1)^p \Delta^p a_0 = a_0 - pa_1 + \frac{p(p-1)}{2} a_2 - \dots + (-1)^j C_p^j a_j + \dots + (-1)^p a_p$$

C_p^j étant le nombre de combinaisons de p objets j à j.

Soit T_n la somme partielle de la nouvelle série. En posant

$$\lim_{n \to \infty} T_n = T$$

On a encore

$$T = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j a_j$$

(*) voir la démonstration en annexe B (page 47).

D'après un théorème dû à Euler (théorème 1) :

$$S = T$$

c'est-à-dire

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \, a_p = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^{p+1}} \quad \sum_{j=0}^{p} (-1)^j \, C_p^j \, a_j$$

Il s'agit de savoir, quand la valeur de S est finie, si T_n tend plus vite vers S que S_n.

On dispose, à cet effet, du théorème suivant :

<u>THEOREME 2</u> Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n$$

est une série alternée pour laquelle les nombres

$$a_0, \; a_1, \; a_2 \; \ldots$$

ont toutes leurs différences (première, deuxième ...), positives pour les paires, négatives pour les impaires et si

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant a \geqslant \frac{1}{2} \qquad \forall \quad n > 0$$

la série transformée

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \; \Delta^p \; a_0$$

converge plus rapidement que la série donnée (voir page 263 de la référence bibliographique n° 3).

Ainsi la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

a une transformée qui converge plus vite qu'elle puisque ses différences (qui peuvent s'expliciter, ce qui n'est en général pas le cas)

$$\Delta^0 1 = 1$$

$$-\Delta^1 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta^2 1 = 1 - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

$$(-1)^n \Delta^n 1 = \frac{1}{n+1}$$

sont positives quel que soit n et que :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{n+2} > \frac{1}{2} \qquad \forall \quad n > 0$$

La série transformée est :

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \Delta^n 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}(n+1)} + \cdots$$

Il est à remarquer qu'elle est, comme toutes les transformées pour lesquelles le théorème 2 s'applique, à termes positifs (*). On obtiendra ainsi une valeur toujours inférieure à celle qu'on cherche.

(A propos de cet exemple on peut obtenir la série de départ et sa transformée en faisant

$$z = 1 \qquad \text{et} \qquad z = -\frac{1}{2}$$

dans

$$\text{Log }(1+Z) = Z - \frac{Z^2}{2} + \frac{Z^3}{3} - \cdots + \frac{(-Z)^{n+1}}{n} - \cdots)$$

(*) Cela tient au fait que, par hypothèse, $(-1)^n \Delta^n a_0 > 0$

De même

$(-1)^n \frac{1}{2^n}$ converge moins vite que sa transformée $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$

car $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$$

$(-1)^n \frac{1}{3^n}$ converge aussi vite que sa transformée $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$$

(c'est un cas limite)

$(-1)^n \frac{1}{4^n}$ converge plus vite que sa transformée $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{8})^n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{4}$$

La transformation d'Euler est d'autant meilleure que la série converge plus lentement.

Ainsi il ne faut que les 7 premiers termes de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\text{Log }(10+n)}$$

qui est d'une convergence particulièrement lente, pour obtenir les 6 premières décimales de sa somme.

2°) Le procédé des demi-sommes .

Il consiste à calculer

$$S_0 = a_0$$

$$S_1 = a_0 - a_1$$

$$S_2 = a_0 - a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_0 - a_1 + a_2 - a_3$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + (-1)^n a_n$$

et à former les demi-sommes de chaque ligne et de sa suivante et à recommencer jusqu'à ce qu'il n'y ait plus qu'un terme. C'est la valeur de ce dernier qu'on prend pour approximation de S.

D'où le tableau :

$$\begin{array}{ccccccccc}
S_0 & & & & & & & & \\
 & \searrow & & & & & & & \\
 & & \dfrac{S_0 + S_1}{2} & \searrow & & & & & \\
 & \nearrow & & & \dfrac{S_0 + 2\,S_1 + S_2}{4} & & & & \\
S_1 & & & \nearrow & & \searrow & & & \\
 & \searrow & & & & & \dfrac{S_0 + 3\,S_1 + 3\,S_2 + S_3}{8} & & \\
 & & \dfrac{S_1 + S_2}{2} & & & \nearrow & & \longrightarrow \dots \longrightarrow & \\
 & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
S_2 & & & & \dfrac{S_1 + 2\,S_2 + S_3}{4} & & & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & \dfrac{S_2 + S_3}{2} & & & & \dfrac{S_{n-3} + 3\,S_{n-2} + 3\,S_{n-1} + S_n}{8} & \longrightarrow \dots \nearrow & \\
 & \nearrow & & & & \nearrow & & & \\
S_3 & & & & \dfrac{S_{n-2} + 2\,S_{n-1} + S_n}{4} & & & & \\
\vdots & & \dfrac{S_{n-1} + S_n}{2} & \nearrow & & & & & \\
 & \nearrow & & & & & & & \\
S_n & & & & & & & &
\end{array}$$

dont la valeur finale est

$$U_n = \frac{1}{2^n}(S_0 + n\,S_1 + \cdots + C_n^p\,S_p + \cdots + S_n)$$

Ainsi pour

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots$$

$$S_0 = 1 \qquad U_0 = 1$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \qquad U_1 = \frac{3}{4}$$

$$S_2 = \frac{5}{6} \qquad U_2 = \frac{17}{24}$$

$$S_3 = \frac{7}{12} \qquad U_3 = \frac{67}{96}$$

$$S_4 = \frac{47}{60} \qquad U_4 = \frac{667}{960}$$

Cette fois-ci, on verra plus loin pourquoi, on a

$$U_0 > U_1 > U_2 > U_3 > U_4 = 0{,}6948 > 0{,}6931 = \text{Log } 2$$

Pour cette même série on a, par la transformation d'Euler (d'après la formule donnant T) ,

$$T_0 = \frac{1}{2}$$

$$T_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$T_2 = \frac{5}{8} + \frac{1}{24} = \frac{2}{3}$$

$$T_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{64} = \frac{131}{192}$$

$$T_4 = \frac{131}{192} + \frac{1}{160} = \frac{661}{960}$$

$$T_0 < T_1 < T_2 < T_3 < T_4 = 0{,}6885 < 0{,}6931 = \text{Log } 2$$

si on ne connaissait pas la valeur de Log 2 on aurait de toute façon

$$0{,}6885 < \mathrm{Log}\ 2 < 0{,}6948$$

3°) Ce procédé consiste à prendre comme valeur approximative de S celle qu'on obtient en appliquant la transformation d'Euler à partir de n'importe quel terme de la série. Le cas particulier le plus courant, qu'on a utilisé ici, est celui qui commence la transformation à la seconde moitié (à une unité près dans le cas impair) des termes considérés.

Pour un nombre pair de termes la nouvelle série est (on a 2k termes)

$$V_{2k-1} = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p a_p + \sum_{p=k}^{2k-1} \frac{1}{2^{p-k+1}} \Delta^{p-k} a_k$$

En revanche, pour un nombre de termes impair (2k + 1) on a 2 possibilités : appliquer la transformation soit au (k + 1)-ième terme soit au (k + 2)-ième.

D'où les formules analogues à la précédente

$$V^1_{2k} = \sum_{p=0}^{k-1} (-1)^p a_p + \sum_{p=k}^{2k} \frac{1}{2^{p-k+1}} \Delta^{p-k} a_k$$

$$V^2_{2k} = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p a_p + \sum_{p=k+1}^{2k} \frac{1}{2^{p-k}} \Delta^{p-k-1} a_k$$

Pour la série

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} - \cdots\cdots$$

On a les valeurs suivantes

$$V_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75 \qquad V_3 = \frac{11}{16} = 0{,}6875$$

$$V_5 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{1}{8} \times \frac{1}{60} = \frac{111}{160} = 0{,}69375$$

(On a

$$V_1 > V_5 > \text{Log } 2 \qquad\qquad V_3 < \text{Log } 2)$$

$$V_0^1 = 1 \qquad\qquad V_0^2 = 1$$

$$V_2^1 = \frac{17}{24} = 0{,}708 \qquad\qquad V_2^2 = 0{,}667$$

$$V_4^1 = 0{,}692 \qquad\qquad V_4^2 = 0{,}696$$

$$(V_0^1 > V_1 > V_2^1 > V_5 > \text{Log } 2 \qquad\qquad V_3 < V_4^1 < \text{Log } 2$$

$$V_0^2 > V_1 > V_4^2 > V_5 > \text{Log } 2 \qquad\qquad V_2^2 < V_3 < \text{Log } 2)$$

On vérifiera aisément que

$$V_0^1 > V_1 > V_2^1 > V_5 > V_6^1 > V_9 > V_{10}^1 > V_{13} > V_{14}^1 > \dots V_{4m+1} > V_{4m+2}^1 > L$$

$$V_0^2 > V_1 > V_4^2 > V_5 > V_8^2 > V_9 > V_{12}^2 > V_{13} > \dots . V_{4m}^2 > V_{4m+1} > \text{Log } 2$$

alors que

$$V_3 < V_4^1 < V_7 < V_8^1 < V_{11} < V_{12}^1 \quad \dots\dots\dots \quad V_{4m-1} < V_{4m}^1 < \text{Log } 2$$

$$V_2^2 < V_3 < V_6^2 < V_7 < V_{10}^2 < V_{11} < \dots\dots\dots \quad V_{4m-2}^2 < V_{4m-1} < \text{Log } 2$$

On en verra la raison plus loin.

Avant de terminer cet exposé sur les méthodes connues il convient de signaler que ces dernières s'appliquent aussi aux séries alternées divergentes, auxquelles on attribue, de ce fait,une valeur.

Ainsi la "valeur" de la série

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - \cdots + (-1)^n \ 2^n - \cdots$$

est $\frac{1}{3}$. On la retrouve en appliquant l'un des procédés à cette série. Les cinq premiers termes donnent par les demi-sommes

$$\frac{3}{8}$$

et, par la transformation d'Euler,

$$\frac{11}{32}$$

b) Définition des fonctions de sommation

Soit une série alternée

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ a_n$$

Soit maintenant g(x) une fonction non croissante définie sur l'intervalle (-1,+1), nulle en dehors de cet intervalle et paire

$$\begin{aligned} g(-x) &= g(x) \\ g(x) &= 0 \qquad\qquad \text{si } |x| > 1 \end{aligned}$$

On appellera fonction de sommation une fonction g(x) pour laquelle

$$\begin{aligned} g(0) &\leqslant 1 \\ g(1) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

(On a

$$1 \geqslant g(0) \geqslant g(\tfrac{1}{n}) \geqslant g(\tfrac{2}{n}) \geqslant \cdots \quad g(\tfrac{p}{n}) \geqslant g(\tfrac{n}{n} = 1) \geqslant 0)$$

Si on forme, en posant

$$g_p = g(\tfrac{p}{n})$$

$$a_0\ g_0 - a_1\ g_1 + a_2\ g_2 - \cdots + (-1)^p\ a_p\ g_p - \cdots + (-1)^n\ a_n\ g_n$$

on obtient une nouvelle série arrêtée au (n+1)-ième terme.

Il s'agit de voir si quand n tend vers l'infini cette série a la même somme que celle dont on est parti et, si c'est le cas, si elle peut converger plus vite.

c) Rapports entre méthodes connues et fonctions de sommation

On va exprimer à présent pour chaque procédé exposé les termes qu'on adopte comme valeur approchée de la série, c'est-à-dire

T_n (transformation d'Euler)

U_n (demi-sommes)

V_n (ils sont plusieurs) (3ème méthode)

<u>directement</u> en fonction de

$$a_0, \quad -a_1, \quad \ldots\ (-1)^n\ a_n$$

1°) Cas de la transformation d'Euler

Du tableau (D) qui suit :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\ a_0 &= \frac{1}{2}\ a_0 \\
-\frac{1}{4}\ a_0 &= \frac{1}{4}\ a_0 - \frac{1}{4}\ a_1 \\
\frac{1}{8}\ a_0 &= \frac{1}{8}\ a_0 - \frac{2}{8}\ a_1 + \frac{1}{8}\ a_2 \\
-\frac{1}{16}\ a_0 &= \frac{1}{16}\ a_0 - \frac{3}{16}\ a_1 + \frac{3}{16}\ a_2 - \frac{1}{16}\ a_3
\end{aligned} \qquad \text{(D)}$$

- -

on déduit par additions successives

$$T_0 \,,\; T_1 \,,\; T_2 \,,\; T_3 \;\ldots\ldots$$

$$T_0 = \frac{1}{2} a_0$$

$$T_1 = \frac{3}{4} a_0 - \frac{1}{4} a_1$$

$$T_2 = \frac{7}{8} a_0 - \frac{4}{8} a_1 + \frac{1}{8} a_2$$

$$T_3 = \frac{15}{16} a_0 - \frac{11}{16} a_1 + \frac{5}{16} a_2 - \frac{1}{16} a_3$$

- -

On voit que le mode de formation d'une ligne à l'aide de la précédente est aisé : le premier coefficient étant de la forme

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

les autres sont la demi-somme du terme de la même colonne à la ligne précédente et de celui qui est à gauche de ce dernier. La loi est analogue à celle des coefficients du triangle de Pascal aux puissances de $\frac{1}{2}$ près.

Comme les coefficients du tableau (D) appliqués à ces mêmes termes ont pour numérateur les valeurs du triangle de Pascal, il est normal qu'il en soit ainsi.

De façon générale le j-ième coefficient de la i-ème ligne est

$$\frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{i-j+1} C_i^{j-1}$$

En conséquence, quand on veut calculer par la transformation d'Euler la valeur approchée de la somme d'une série à l'aide de ses m premiers termes, on l'obtient en multipliant scalairement ces termes par ceux de la m-ième ligne du tableau (E)

$$
\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{2} & & & & & \\[2ex]
\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & & & & \\[2ex]
\frac{7}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} & & & \\[2ex]
\frac{15}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} & & \\[2ex]
\frac{31}{32} & \frac{26}{32} & \frac{16}{32} & \frac{6}{32} & \frac{1}{32} & \\[2ex]
\frac{63}{64} & \frac{57}{64} & \frac{42}{64} & \frac{22}{64} & \frac{7}{64} & \frac{1}{64}
\end{array}
\qquad \text{(E)}
$$

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

2°) Cas des demi-sommes.

Exprimant dès le début chaque S_i en fonction des a_j $(j \leqslant i)$ qui le composent, on obtient

$$
\begin{aligned}
S_0 &= a_0 \\
S_1 &= a_0 - \frac{1}{2}\, a_1 \\
S_2 &= a_0 - \frac{3}{4}\, a_1 + \frac{1}{8}\, a_3 \\
S_3 &= a_0 - \frac{7}{8}\, a_1 + \frac{4}{8}\, a_2 - \frac{1}{8}\, a_3 \\
S_4 &= a_0 - \frac{15}{16}\, a_1 + \frac{11}{16}\, a_2 - \frac{5}{16}\, a_3 + \frac{1}{16}\, a_4
\end{aligned}
$$

On voit immédiatement que le mode de formation est analogue à celui du cas précédent. Le tableau résultant (D-S) est

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & \frac{1}{2} \\
1 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\
1 & \frac{7}{8} & \frac{4}{8} & \frac{1}{8} \\
1 & \frac{15}{16} & \frac{11}{16} & \frac{5}{16} & \frac{1}{16} \\
1 & \frac{31}{32} & \frac{26}{32} & \frac{16}{32} & \frac{6}{32} & \frac{1}{32} \\
- - - & - - - & - - - & - - - & - - - & - - -
\end{array} \qquad (D.S)$$

Il n'est autre que celui de la transformation d'Euler devant lequel on a ajouté une colonne de 1 telle que le tableau soit toujours triangulaire.

Par conséquent, appliquer le procédé des demi-sommes à une série revient à se servir de la transformation d'Euler à partir du deuxième terme. D'où l'expression

$$1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{24} - \frac{1}{96} - \frac{1}{320} - \cdots - \frac{1}{2^n}\ \frac{1}{n(n+1)} - \cdots = \text{Log } 2$$

De même se servir de la transformation d'Euler revient à appliquer le procédé des demi-sommes à la série devant laquelle on a ajouté 0.

Ainsi s'explique le fait que lorsque la transformée d'Euler d'une série converge plus vite que la série elle-même, ce qui assure des valeurs toujours inférieures à la somme cherchée, le procédé des demi-sommes donne des valeurs décroissantes, c'est-à-dire supérieures à la somme.

En effet, S est la somme de la série, T_n la somme partielle obtenue par la transformée d'Euler. On a :

$$T_n < S$$

U_n étant la somme partielle des n+1 premiers termes, obtenue par la série résultant du procédé des demi-sommes, pour calculer U_n on peut aussi appliquer la transformation d'Euler à la série

$$a_1 - a_2 + a_3 - \cdots\cdots + (-1)^n a_n - \cdots$$

c'est-à-dire la série dont la somme est

$$R = a_0 - S$$

Sa transformée donnera une somme partielle TR_{n-1}

telle que

$$TR_{n-1} < R$$

ou encore

$$- TR_{n-1} > -R$$

$$a_0 - TR_{n-1} > -R + a_0$$

Comme

$$U_n = a_0 - TR_{n-1}$$

et

$$a_0 - R = S$$

on a bien

$$U_n \quad S$$

Alors

$$T_n < S < U_n$$

Il est important de souligner que la réduction des procédés d'Euler et des demi-sommes à des procédés de sommation a permis de montrer les liens qu'il y avait entre eux et de justifier la décroissance des sommes partielles de la méthode des demi-sommes vers la limite cherchée. De sorte que même si les procédés de sommation ne devaient pas fournir de méthodes nouvelles ils apparaissent comme une méthode d'étude intéressante.

Il sera bon à chaque fois qu'on aura le tableau d'une fonction de sommation qui accélère la convergence d'une série, d'examiner ce que donne le tableau triangulaire, qu'on peut qualifier de dual, obtenu en ajoutant, si elle n'y est pas (on peut pourtant se passer de cette restriction), une colonne de 1 devant ou en la supprimant si elle existe.

On peut maintenant vérifier sur un exemple que les valeurs numériques trouvées sont bien les mêmes que celles obtenues par les procédés d'Euler et des demi-sommes. On a déjà vu que T_4 et U_4 valent respectivement

$$\frac{661}{960} \quad \text{et} \quad \frac{667}{960}$$

pour la série

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots\cdots + (-1)^n a_n - \cdots\cdots$$

On a bien

$$T_4 = \frac{31}{32} \times 1 - \frac{26}{32} \times \frac{1}{2} + \frac{16}{32} \times \frac{1}{3} - \frac{6}{32} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{32} \times \frac{1}{5} = \frac{930-390+160-45+6}{960} = \frac{661}{960}$$

$$U_4 = 1 \times 1 - \frac{15}{16} \times \frac{1}{2} + \frac{11}{16} \times \frac{1}{3} - \frac{5}{16} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \times \frac{1}{5} = \frac{960-450+220-75+12}{960} = \frac{667}{960}$$

3°) Troisième cas.

Le premier cas était celui de la transformation d'Euler appliquée à tous les termes de la série.

Le deuxième cas celui de la transformation d'Euler appliquée à partir du deuxième terme de la série (procédé des demi-sommes).

Le troisième cas est celui de la transformation d'Euler appliquée à partir de la seconde moitié des termes considérés ou, plus généralement, à partir d'un certain terme, <u>ce qui englobe tous les cas</u>.

Pour la première hypothèse de ce troisième cas on a les 2 tableaux (M1) et (M2).

(M1)						(M2)					
1						1					
1	$\frac{1}{2}$					1	$\frac{1}{2}$				
1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$				1	1	$\frac{1}{2}$			
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$			1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$		
1	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$		1	1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	
1	1	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	1	1	$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$

Les lignes paires de ces deux tableaux sont, bien entendu, les mêmes.

On pourrait aussi supprimer la première colonne de chacun de ces tableaux.

On peut maintenant justifier le fait que par la troisième méthode on a, à partir de la deuxième ou de la troisième, deux à deux, des valeurs de part et d'autre de la somme de la série.

Pour le premier tableau on emploie le procédé des demi-sommes pour les trois premières lignes, d'où des valeurs supérieures, puis le même procédé à partir du deuxième terme pour les deux suivants, d'où des valeurs inférieures puisque c'est le contraire de la transformation d'Euler, ensuite à nouveau le procédé des demi-sommes à partir du troisième terme et ainsi de suite.

Pour le second tableau l'alternance commence à la troisième ligne.

Quel que soit le tableau considéré, qu'il s'agisse de ces deux derniers tableaux ou des deux précédents, la somme alternée des valeurs d'une ligne vaut

$$\frac{1}{2}$$

Pour le prouver il suffit de le faire dans le cas du premier tableau, celui qu'on a appelé (E). Cela devient alors immédiat pour les autres. Il faut montrer que

$$\frac{1}{2^i} \sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \sum_{v=1}^{i-j+1} C_i^{v-1} = \frac{1}{2}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{i} (-1)^{j-1} \sum_{v=1}^{i-j+1} C_i^{v-1} = 2^{i-1}$$

On écrit le second membre sous forme de colonne d'où, dans le cas pair, la double somme algébrique

$$
\begin{array}{l}
C_i^0 - C_i^0 + C_i^0 - C_i^0 + C_i^0 - \cdots\cdots\cdots + C_i^0 - C_i^0 \\
+ C_i^1 - C_i^1 + C_i^1 - C_i^1 + C_i^1 - \cdots\cdots\cdots + C_i^1 \\
- \\
+ C_i^{i-4} - C_i^{i-4} + C_i^{i-4} - C_i^{i-4} \\
+ C_i^{i-3} - C_i^{i-3} + C_i^{i-3} \\
+ C_i^{i-2} - C_i^{i-2} \\
+ C_i^{i-1}
\end{array}
$$

En additionnant horizontalement il reste bien

$$C_i^{i-1} + C_i^{i-3} + \cdots\cdots\cdots + C_i^1 = 2^{i-1}$$

Pour le cas impair on a de même

$$C_i^{i-1} + C_i^{i-3} + \cdots\cdots\cdots + C_i^0 = 2^{i-1}$$

Ainsi on justifie le fait que la transformation d'Euler donne des résultats d'autant meilleurs que la série est plus lentement convergente. En effet, à la limite on retrouve la série

$$1 - 1 + 1 - 1 + \cdots\cdots\cdots$$

dont la valeur est $\frac{1}{2}$. On arrive donc très rapidement, puisque les premiers termes sont proches de 1, à une valeur voisine de la somme qui est, si $a_0 = 1$, légèrement supérieure à $\frac{1}{2}$.

Il en est de même pour les autres méthodes exposées.